الفصل الأول

الأعداد الحقيقية

Real Numbers

1.1 خط الأعداد الحقيقية

الأعداد الطبيعية (Natural Numbers)

$$1, 2, 3, , ...$$

وهي التي تستخدم في العد، ويمكن الحصول على أي عدد منها بجمع العدد 1 إلى نفسه عدداً من المرات، وهي أول نظام عددي عرفه الإنسان، ويرمز لها عادة بالرمز $\mathbb{N}$، أي أن:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

وهي مجموعة غير منتهية مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب.

الأعداد الصحيحة (Integer Numbers)

$$0, \pm 1, 2, \pm 3, ...$$

وهي الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر وسالب الأعداد الطبيعية. وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح.

ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز I، أي أن:

$$I = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

وهي كذلك مجموعة غير منتهية.

الأعداد القياسية (Rational Numbers):

وهي الأعداد التي على شكل $\frac{a}{b}$ حيث a, b يمثلان عددين صحيحين، و$b \neq 0$.
ويرمز لمجموعة الأعداد القياسية بالرمز $\mathbf{Q}$، أي أن:

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in I, b \neq 0\right\}$$

نلاحظ أن أي عدد صحيح a يكون العدد القياسي $\frac{a}{1}$.

العدد القياسي: إما أن يكون عدداً عشريّاً منتهياً مثل 0.243، أو عدداً عشريّاً غير منته ومتكرر المقاطع مثل:

$$\frac{2}{7} = 0.28571428571..., \frac{3}{11} = 0.272727..., \frac{1}{3} = 0.333...$$

الأعداد غير القياسية (Irrational Numbers):

العدد غير القياسي، هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{a}{b}$، حيث a وb يمثلان عددين صحيحين. أي أن الأعداد غير القياسية، هي الأعداد الحقيقية التي لا تكون أعداداً قياسية. يرمز لمجموعة الأعداد غير القياسية بالرمز $\mathbf{Q}^c$، أي أن:

$$\mathbf{Q}^c = \{r : r \neq \frac{a}{b}, a, b, \in I\}$$

بعض الأمثلة على الأعداد غير القياسية: $\pi = 3.14159265...$، $\sqrt{2} = 1.41421356...$ و $\sqrt{3} = 1.73205081$.

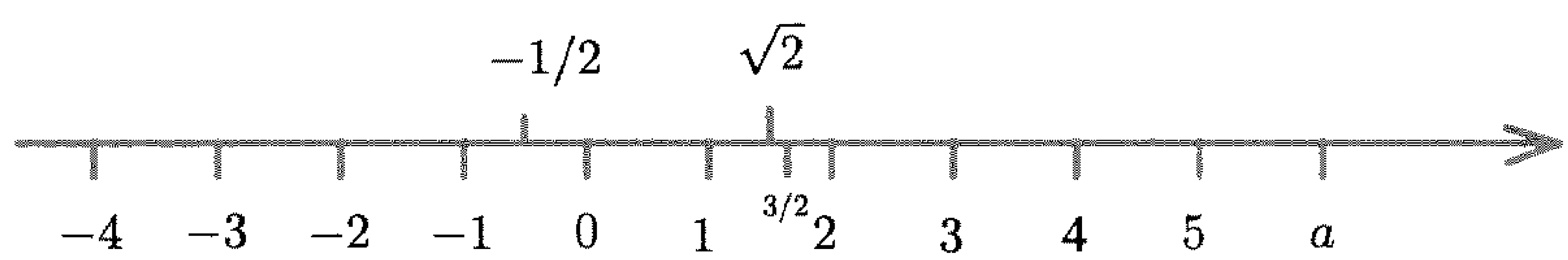
الأعداد الحقيقية (Real Numbers):

الأعداد الحقيقية هي كل الأعداد القياسية وغير القياسية، ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $I\!R$، أي أن:

$$I\!R = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$$

تمثَّل الأعداد الحقيقية بنقط على خط أفقي، حيث تقابل كل عدد حقيقي نقطة واحدة فقط، والعكس صحيح كذلك، أي أن كل نقطة على الخط الأفقي يقابلها عدد حقيقي واحد فقط.

نتخير أولاً نقطة 0، يقابلها العدد صفر 0، وعلى يمينها ـ وبمسافات متساوية التباعد بعضها عن بعض ـ تمثِّل النقط الأعداد الصحيحة الموجبة، وعلى يسار النقطة 0 ـ وبمسافات متساوية التباعد بعضها عن بعض ـ تمثِّل النقط الأعداد الصحيحة السالبة، ويتم تمثيل باقي الأعداد الحقيقية. (أنظر اشكل 1.1).



الشكل 1.1

العدد a المناظر للنقطة A يسمى إحداثيّ (Coordinate) النقطة A، ويسمى هذا الخط الأفقي خط الأعداد الحقيقية (Real Line).

من الملاحظ أن مجموعة الأعداد الطبيعية $I\!N$مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحية I، وهي بدورها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد القياسية $\mathbb{Q}$، والأخيرة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $I\!R$، أي أن:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathrm{I} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

وليس بين مجموعتي الأعداد القياسية وغير القياسية أي عدد مشترك. الشكل (2.1) يوضح هذه الفكرة.

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية، فإن:

1) $a+b$ عدد حقيقي.

2) $a.b$ عدد حقيقي.

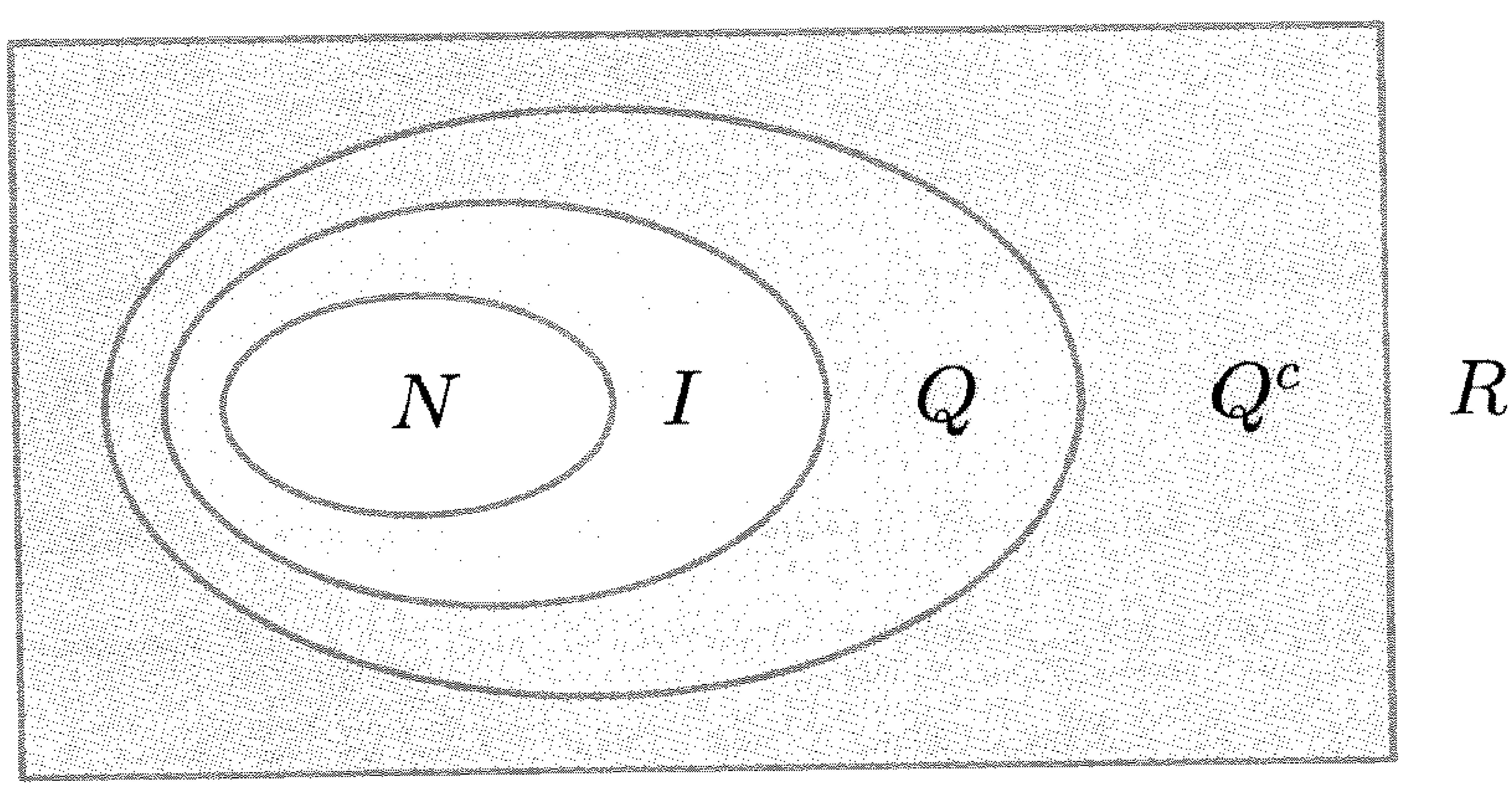
3) $\frac{a}{b}$ (حيث $b \neq 0$) عدد حقيقي.

4) 0 عدد حقيقي، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع.

5) 1 عدد حقيقي، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب.

6) لكل عدد حقيقي a معكوس جمعي $(-a)$.

7) لكل عدد حقيقي a لا يساوي الصفر معكوس ضربي $\left(\frac{1}{a}\right)$.



شكل 2.1

تمارين 1.1

في التمارين التالية، ضع علامة صح ($\surd$) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة خطأ ($\times$) أمام العبارة الخاطئة:

1) $\sqrt{2}$ عدد قياسي.

2) $1-\sqrt{3}$ عدد غير قياسي.

3) $\frac{10}{3}$ عدد غير قياسي.

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عدد غير قياسي.

5) العدد الحقيقي إما أن يكون عدداً قياسياً، وإما عدداً غير قياسي.

6) لكل عدد صحيح معكوس ضربي في مجموعة الأعداد الصحيحة.

7) لكل عدد طبيعي معكوس جمعي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

8) قد لا يكون العدد الحقيقي عدداً صحيحاً، ولكن لا بد أن يكون عدداً قياسياً.

9) بين كل عددين صحيحين متتالين عدد لانهائي من الأعداد القياسية.

10) لكل عدد صحيح غير صفري معكوس ضربي.

11) $\mathbb{Q}^c \supseteq \mathbb{N}$.

2.1 المتباينات (Inequalities)

إذا كان a,b عددين حقيقيين، وكانت النقطة المقابلة للعدد a تقع على يمين النقطة المقابلة للعدد b على خط الأعداد، فإننا نقول إن العدد a أكبر من العدد b، ونكتب ذلك على شكل $a > b$، ويكافىء ذلك قولنا إن العدد b أصغر من العدد a.

الجمل: $a > b$ ، $a \geq b$ (العدد a أكبر من أو يساوي العدد b) $a < b$ و$a \leq b$ تسمى متباينات، وتسمى الإشارات $>$، $\leq$، $<$ و$\geq$ إشارات المتباينات.

خواص المتباينات:

إذا كانت a,b,c أعداداً حقيقية، فإن:

1) $b < a$ أو $a < b$ أو $b = a$.

2) $b < a$ و$c < b$ يؤدي إلى أن $c < a$.

3) $b < a$ يؤدي إلى أن $b + c < a + c$ لأي عدد حقيقي c

4) $b < a$ و$c > 0$ يؤدي إلى أن $bc < ac$.

5) $b < a$ و$c < 0$ يؤدي وأن $bc > ac$.

الإشارة $\geq$ تعني أكبر من أو يساوي، والإشارة $\leq$ تعني أصغر من أو يساوي.

تكون كل الخواص السابقة صحيحة إذا وضعنا $\leq$ بدلاً من $<$.

مثـال 1

أوجد حلول المتباينة $2x + 1 > 2$.

الحـــل

بإضافة (-1) للطرفين، يكون $2x+1-1>2-1$، إذن $2x>1$

وبالضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$، نحصل على $x>\frac{1}{2}$

أي أن أي عدد أكبر من $\frac{1}{2}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

مثـــال 2

إذا كان $1-3x>2$، أوجد حلول هذه المتباينة.

الحـــل

بإضافة (-1) للطرفين، يكون $1-3x-1>2-1$

إذن $-3x>1$

وبالضرب في $\left(-\frac{1}{3}\right)$، يكون لدينا $x<-\frac{1}{3}$

(لاحظ أن إشارة المتباينة تغيرت في هذه الحالة)

أي أن أي عدد أصغر من $-\frac{1}{3}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

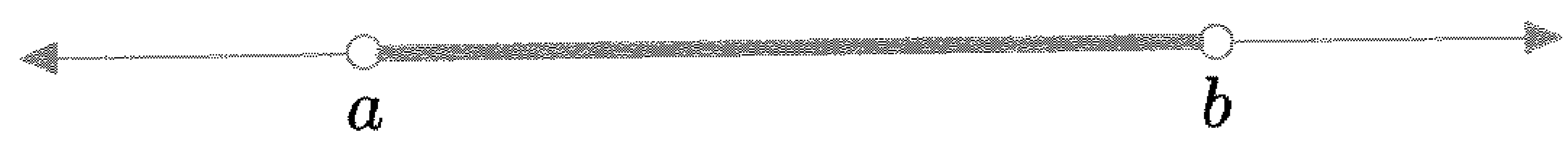
الفترات (Intervals)

إذا كان $a,b\in \mathbb{R}$ وكان $a<b$، فإن:

1) الفترة المفتوحة (a,b): هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بحيث لا يكون العددان a وb في هذه المجموعة.

$$(a,b)=\{x: a<x<b\}$$

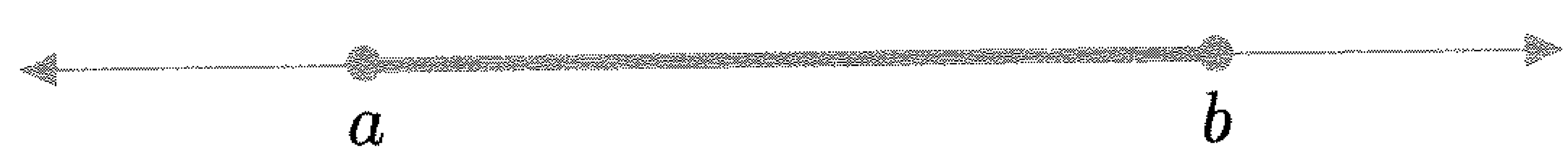
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



2) الفترة المغلقة $[a,b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك a وb.

$$[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

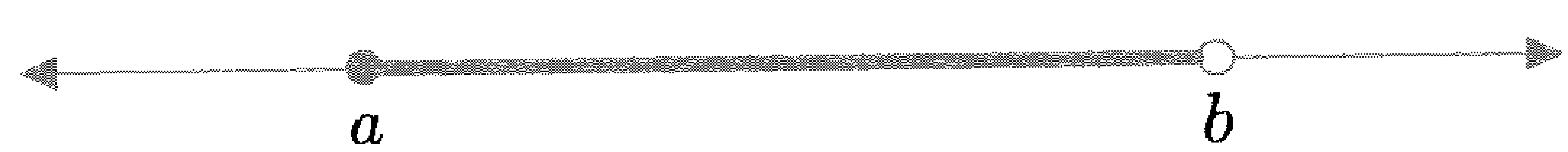
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



3) الفترة نصف المفتوحة $[a,b)$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك العدد a.

$$[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

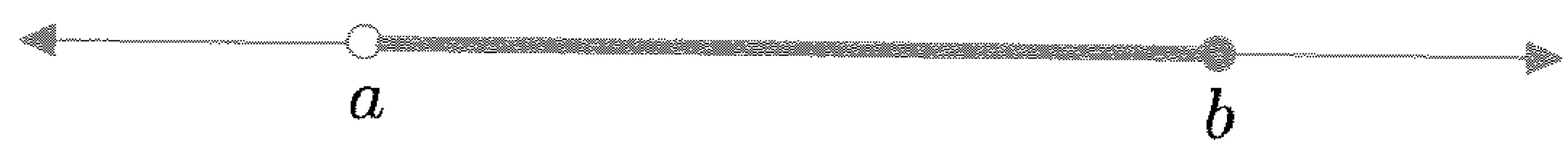
وتمثل على خط الأعداد كالآتي:



4) الفترة نصف المفتوحة $(a,b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، التي تقع بين a وb، بما في ذلك العدد b.

$$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

وتمثل على خط الأعداد كالآتي:

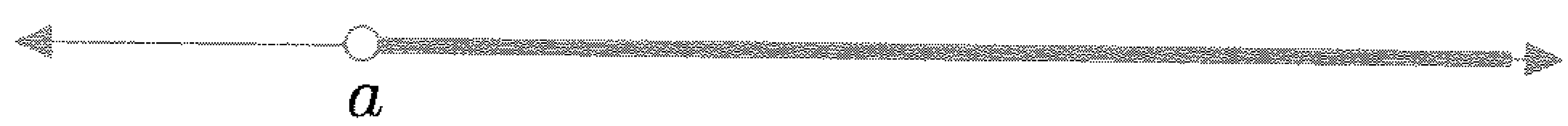


هذه الفترات تسمى الفترات المحدودة. أما الفترات غير المحدودة، فيمكن تصنيفها كالآتي:

1) $(a, +\infty)$ وهي كل الأعداد الحقيقية x، الأكبر من العدد a.

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}$$

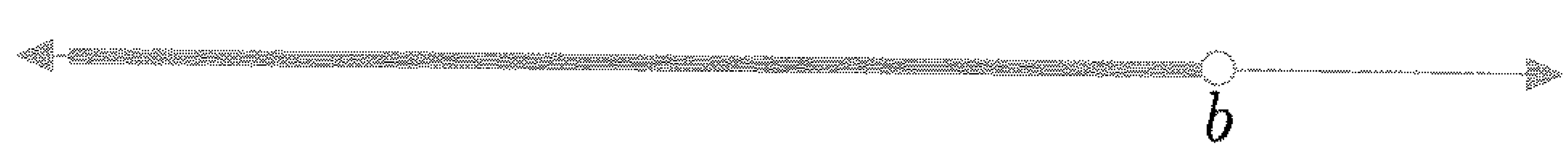
وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



2) $(-\infty, b)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأصغر من العدد b.

$$(-\infty, b) = \{x : x < b\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



3) $[a, +\infty)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأكبر من a أو تساويه.

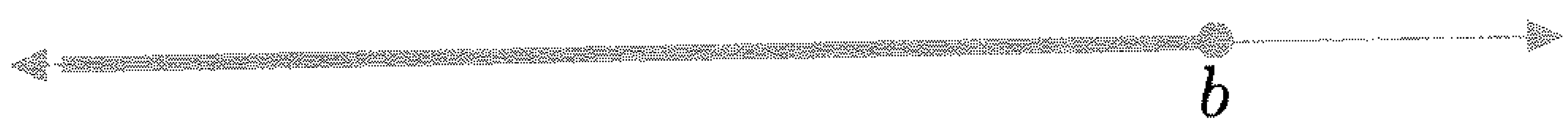
$$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:

4) $(-\infty, b]$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x، الأصغر من b أو تساويه.

$$(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$$

وتمثل على خط الأعداد بالشكل:



يجب ملاحظة أن الرمزين $+\infty$ و$-\infty$ ليسا من ضمن الأعداد الحقيقية، ولهذا نستطيع كتابة الأعداد الحقيقية على الشكل: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

مثال 3

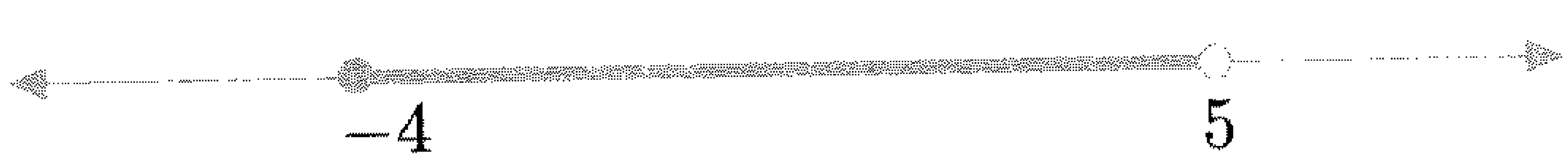
أوجد مجموعة الحل، ومثّلها بيانياً على خط الأعداد للمتباينة $-11 \leq 2x - 3 < 7$.

الحل

بإضافة (3) إلى طرفي المتباينة، نحصل على: $-8 \leq 2x < 10$

وبالقسمة على (2)، نحصل على $-4 \leq x < 5$

وبذلك تكون مجموعة الحل الفترة $[-4, 5)$ (أنظر الشكل 3.1).



شكل 3.1

مثـــال 4

أوجد حل المتباينة $\frac{1}{x} < 4$.

الحـــل

الحالة الأولى: إذا كان $x > 0$

بضرب المتباينة في x، نجد أن: $1 < 4x$ أو $x > \frac{1}{4}$

الحالة الثانية: إذا كان $x < 0$

بضرب المتباينة في x، نجد أن: $1 > 4x$ أو $x < \frac{1}{4}$

ولكن $x < 0$، وبذلك يكون الحل في الحالة الثانية هو $x < 0$، إذن مجموعة الحل هي: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

مثـــال 5

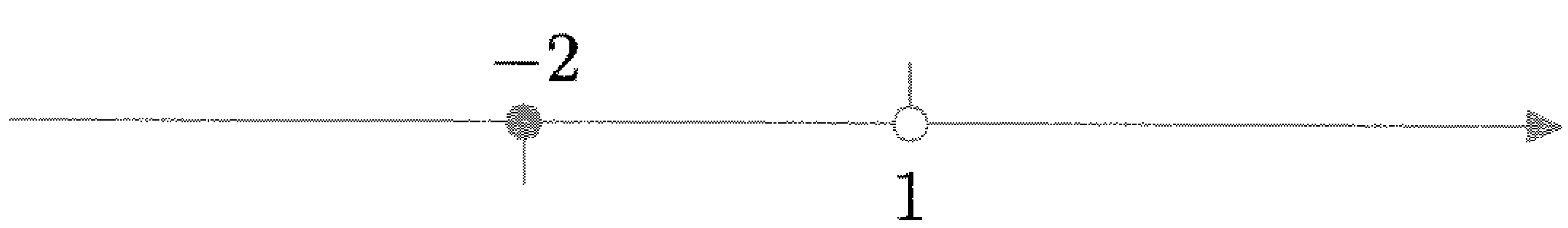
أوجد مجموعة الحل إذا كان $x^2 + x - 2 > 0$.

الحـــل

يمكن كتابة $x^2 + x - 2$ على شكل $(x+2)(x-1)$

نلاحظ أن $(x+2)(x-1) > 0$ يعني أن المقدارين $(x+2)$ و$(x-1)$ إما أن يكونا موجبين معاً وإما سالبين معاً.

إشارة $(x-1)$ + + + + + + + + + − − − − − − − − − − − − − − −



إشارة $(x+2)$ + + + + + + + + + + + + + + + − − − − − − −

من الرسم، يتضح أن لهما نفس الإشارة في الفترتين $(1,\infty)$ و$(-\infty,-2)$
إذن مجموعة الحل: $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

مثال 6

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{3x+2}{2x-7} \le 0$.

الحل

الحالة الأولى: إذا كان $2x-7>0$، يعني ذلك أن $x > \frac{7}{2}$.
بضرب المتباينة في $2x-7$، فإن:
$3x+2 \le 0$، وهذا يؤدي إلى أن $x \le -\frac{2}{3}$
مما يؤدي إلى تناقض (لماذا؟).

الحالة الثانية: إذا كان $2x-7<0$، ومعنى ذلك أن $x < \frac{7}{2}$.
بضرب المتباينة في $2x-7$، فإن:
$3x+2 \ge 0$، وهذا يؤدي إلى أن $x \ge -\frac{2}{3}$
إذن مجموعة الحل هي: $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right)$

تمارين 2.1

في التمارين من 1 إلى 9، أوجد مجموعة الحل في كل حالة من الحالات التالية، ومثّلها على خط الأعداد:

1) $-2 < 3x + 4 < x^2$

2) $2 - 3x \geq 1$

3) $x^2 - 2x - 3 < 0$

4) $\dfrac{x-1}{2x+3} < 0$

5) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

6) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 5$

7) $x^2 + 6x + 1 \leq 0$

8) $3x + 4 < 6$

9) $11 < x^2 + 6x + 4 < 20$

في التمارين من 10 إلى 15، مثّل بيانيًّا المجموعات التالية:

10) $\{(x, y) : x > 0, y > 2\}$

11) $\{(x, y) : x^{-1} < 0, y < -1\}$

12) $\{(x, y) : x^2 \geq 0\}$

13) $\{(x, y) : x + 2y < -1\}$

14) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

15) $\{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$

3.1 القيمة المطلقة (Absolute Value)

يرمز للقيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x بالرمز $|x|$، ويعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$$

من التعريف، نلاحظ أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي، لا بد أن تكون أكبر من الصفر أو تساويه، أي أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي تكون موجبة أو صفراً.

هندسيا، القيمة المطلقة للعدد x، هي المسافة بين النقطة A التي إحداثيها x ونقطة الأصل 0.

إذا كانت A وB نقطتين على خط الأعداد بإحداثيات x وy على الترتيب، فإن $|x-y|$ هي المسافة بين A وB.

تعريف 1.1

إذا كان a عدداً حقيقيًا موجباً، وx أي عدد حقيقي فإن:

$|x| \leq a$ إذا وإذا كان فقط $-a \leq x \leq a$

خواص القيمة المطلقة

إذا كانت $a, x, y \in \mathbb{R}$، فإن:

1) $|x| = 0$ إذا وإذا كان فقط $x = 0$.

2) $|x||y| = |xy|$.

3) $|-x| = |x|$ وكذلك $|x| = \sqrt{x^2}$.

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ بشرط أن $y \neq 0$.

5) $|x+y| \leq |x|+|y|$.

6) $|x|^2 = x^2$.

7) $|x| = y$ إذا وإذا كان فقط $x = y$ أو $x = -y$.

سوف نبرهن فقط الخاصية (5)، ونترك باقي الخواص للطالب كتمرينات.

نعرف جيداً أن $x \leq |x|$ وكذلك $y \leq |y|$.

ومن ذلك فإن: $x+y \leq |x|+|y|$.

وكذلك $-x \leq |x|$ و $-y \leq |y|$ وبهذا يكون لدينا: $-(x+y) \leq |x|+|y|$

أو $-(|x|+|y|) \leq x+y$ (من خاصية الضرب في عدد سالب).

الآن حصلنا على: $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

ومن التعريف 1.1 يكون لدينا: $|x+y| \leq |x|+|y|$ وهو المطلوب.

من الخواص المهمة المستعملة كثيراً للقيمة المطلقة الخاصية التالية:

إذا كان $a > 0$، فإن:

$|x| \geq a$ إذا وإذا كان فقط $x \geq a$ أو $x \leq -a$

مثال 7

حل المتباينة $|3x+4| \leq 2$.

الحل

$|3x+4| \leq 2$ إذا وإذا كان فقط $-2 \leq 3x+4 \leq 2$، وبطرح (4) من أطراف المتباينة، نجد أن: $-6 \leq 3x \leq -2$.

بالقسمة على (3)، يكون لدينا: $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$

أي أن مجموعة الحل لهذه المتباينة، هي: $x \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right]$.

مثال 8

أوجد. الحل للمتباينة $|x+2| \geq 8$.

الحل

$|x+2| \geq 8$ إذا وإذا كان فقط $x+2 \geq 8$ أو $x+2 \leq -8$.

في الحالة $x+2 \geq 8$ نطرح (2) من الطرفين فنحصل على: $x \geq 6$.

وفي الحالة الثانية $x+2 \leq -8$، نحصل على x بطرح 2 من الطرفين، أي أن: $x \leq -10$

من الحالتين، نجد أن مجموعة الحل هي: $(-\infty, -10] \cup [6, \infty)$.

تمارين 3.1

في التمارين من 1 إلى 13، أوجد مجموعة الحل في كل حالة من الحالات التالية، ومثّلها على خط الأعداد:

1) $|2x+1| \leq 5$

2) $|3x-2| \geq |2x+1|$

3) $|x| - |2x+1| \geq 0$

4) $|3x-5| > 2$

5) $|2x-3| + |x-1| = 4$

6) $|x-5| = |3x-1|$

7) $|x-2| \geq 1$

8) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 4$

9) $\frac{|3x+1|}{x+5} < x$

10) $|x^2-4| \geq 5$

11) $|3x+5| \geq |4x|$

12) $|x^2+2x+3| \geq 5$

13) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 6$

14) برهن على أن: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ شرط أن $y \neq 0$.

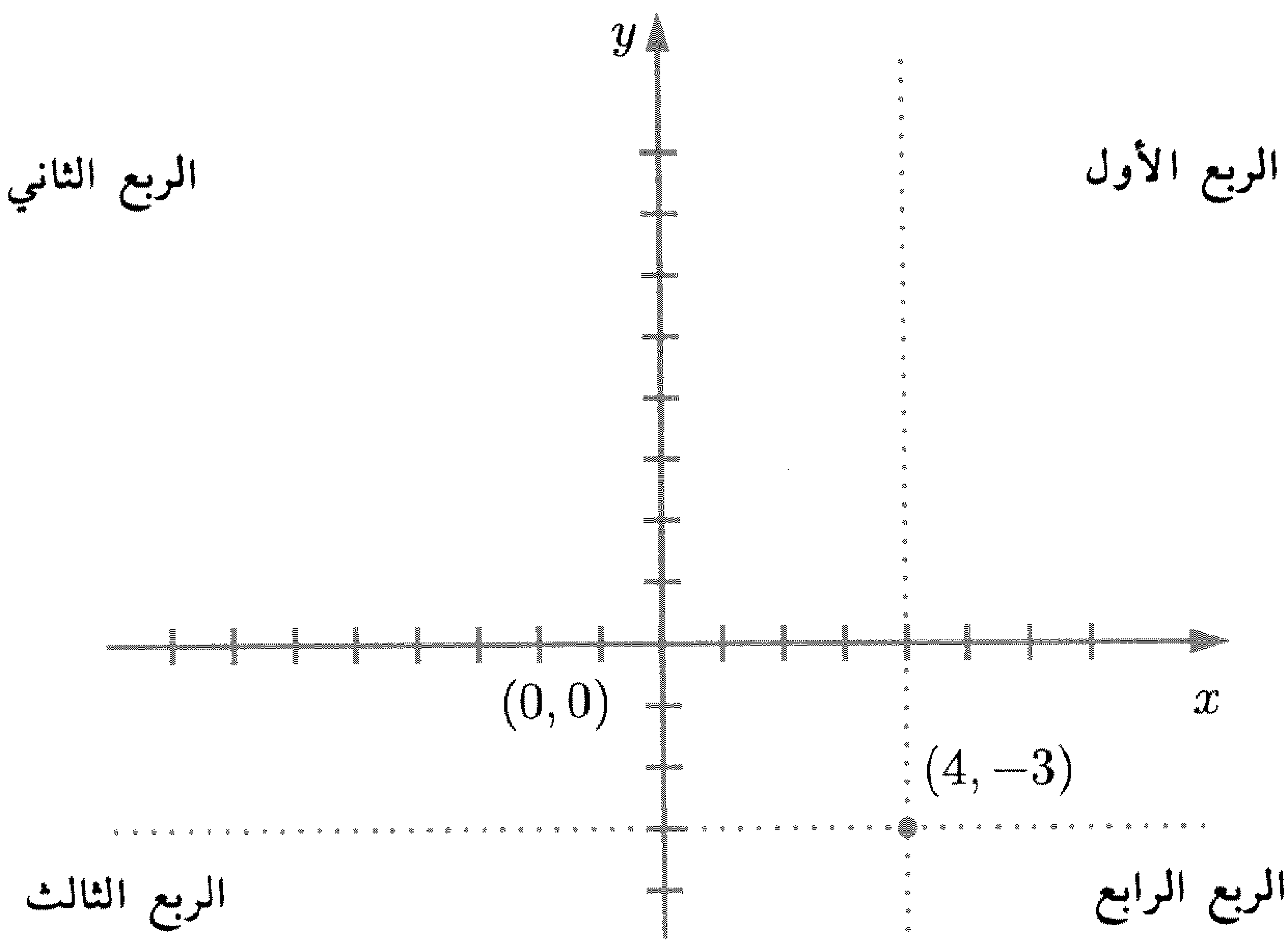
15) وضّح أن: $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; \quad x>0 \\ -1 & ; \quad x<0 \end{cases}$ شرط أن $x \neq 0$.

4.1 نظام الإحداثيات المتعامدة (أو الديكارتية) (Cartesian Coordinate System)

يتكوّن نظام الإحداثيات الديكارتية من خطي أعداد متعامدين، يسمى كل منهما محوراً، ويتقاطعان عند نقطة الأصل O.

يسمى المحور الأفقي المحور السيني X، ويسمى المحور العمودي المحور الصادي Y.

كل نقطة A في مستوى المحاور الديكارتية يمثلها زوج مرتب (x,y)؛ حيث يسمى x الإحداثي السيني أو الأول، ويسمى y الإحداثي الصادي أو الثاني للنقطة A.



الشكل 3.1

إذا كان (a,b) و(c,d) زوجين مرتبين، فإن:

$(a,b)=(c,d)$ إذا وإذا كان فقط $b=d$ و$a=c$.

تعريف 2.1

تسمى مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية بالمستوى الديكارتي، ويرمز له بالرمز $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

ينقسم المستوى الديكارتي إلى أربعة أقسام، ويسمى كل قسم منها بالربع.

الربع الأول يتكوّن من الأزواج المرتبة التي تكون إحداثياتها موجبة، ويتكون الربع الثاني من الأزواج المرتبة التي يكون إحداثيها الأول سالباً، وإحداثيها الثاني موجباً، بينما يتكون الربع الثالث من الأزواج المرتبة التي تكون إحداثياتها سالبة، ويتكون الربع الرابع من الأزواج المرتبة التي يكون إحداثيها الأول موجباً، وإحداثيها الثاني سالباً (أنظر الشكل 3.1).

لرسم النقطة $(4, -3)$ نتحرك أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات، وثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات، وعند التقاطع تكون النقطة $(4, -3)$.

المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي

(Distance Between Two Points)

إذا كانت $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$، فلإيجاد المسافة بين النقطتن A وB، نكوّن المثلث ABC قائم الزاوية في C.

نلاحظ أن إحداثيي النقطة C هما (x_2, y_1).

وبما أن A وC على خط أفقي واحد، فإن المسافة AC تساوي $|x_2 - x_1|$، وإن النقطتين B وC على خط عمودي واحد، فإن المسافة BC تساوي $|y_2 - y_1|$.

من نظرية فيثاغورس، نجد أن: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

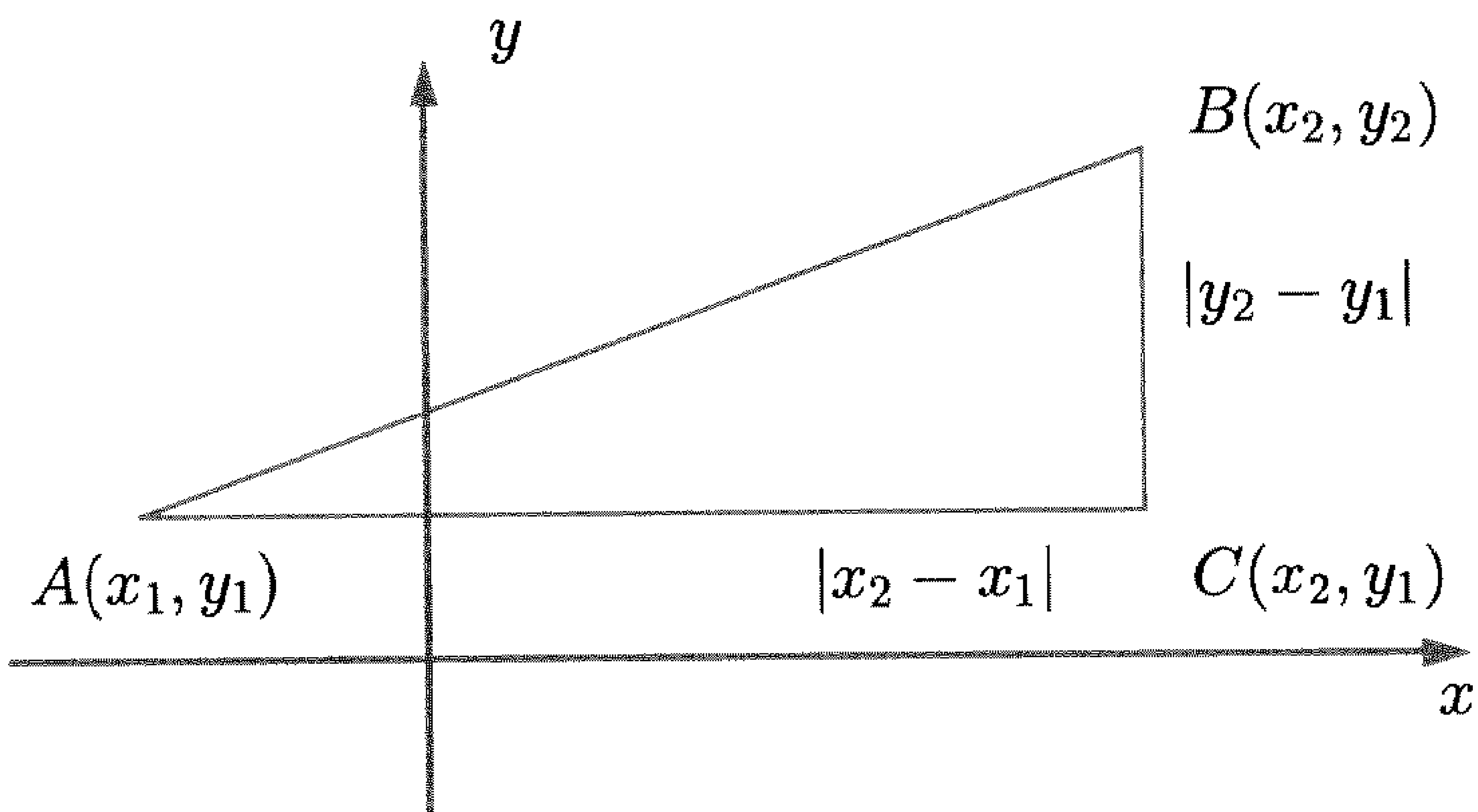
أي أن: $d = \sqrt{AB^2} = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

إذن: $d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + (y_2 - y_1)^2}$

وبما أن $|x|^2 = x^2$، فإن:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

تسمى هذه الصيغة صيغة المسافة.



الشكل 4.1

مثـــال 9

أوجد المسافة بين النقطتين $(2,5)$ و$(-3,7)$.

الحـــل

لنقل إن $(x_1, y_1) = (2,5)$ و$(x_2, y_2) = (-3,7)$

إذن: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$d = \sqrt{(-3-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \approx 5.38516481$$

تمارين 4.1

في التمارين من 1 إلى 6، أذكر الربع الذي توجد فيه النقطة المذكورة، ومثلها في المستوى الديكارتي:

1) $(1,2)$ 2) $(-1,4)$

3) $(-3,-2)$ 4) $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

5) $\left(\frac{1}{4},\pi\right)$ 6) $(\sqrt{2},-\sqrt[3]{2})$

في التمارين من 7 إلى 10، أوجد المسافة بين النقطتين المذكورتين في كل حالة:

7) $(-2,3)$ و$(2,\sqrt{2})$ 8) $(0,4)$ و$\left(-\frac{1}{8},3\right)$

9) $(-3,-5)$ و$(-7,-8)$ 10) $(a+1,b)$ و$(a,b+1)$

11) وضح أن النقط $(-2,-3)$، $(3,-1)$، $(1,4)$ و$(-4,2)$ تكوّن رؤوس مربع.

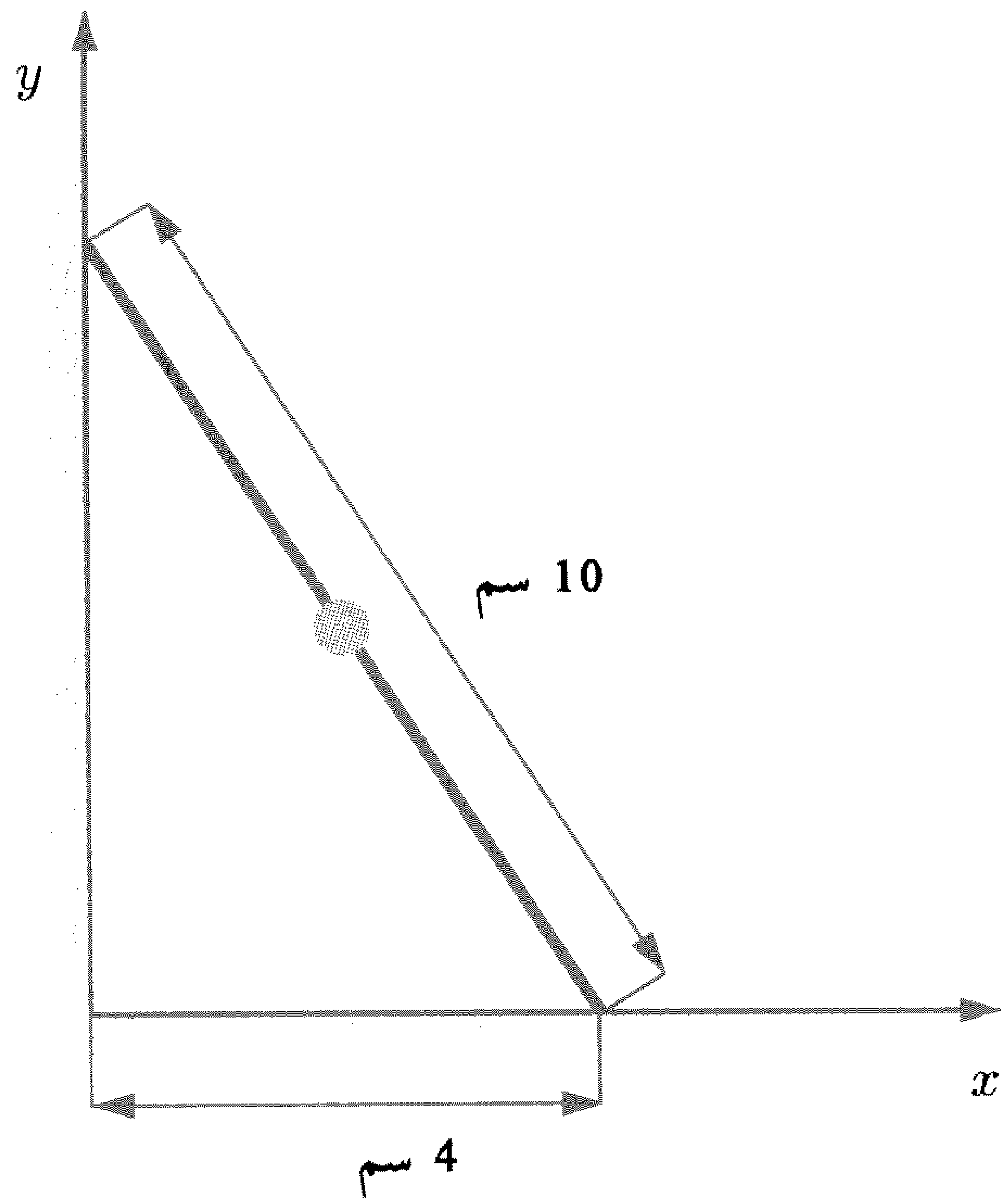
12) أوجد كل قيم x بحيث تكون المسافة بين $(-2,3)$ و(x,x) مساوية 5 وحدات.

13) حدّد ما إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط المعطاة مثلثاً قائم الزاوية:

أ) $A(2,9), B(-1,3), C(6,7)$

ب) $A(-1,4), B(3,6), C(1,1)$

14) وُضع سلم طوله 10 أمتار على حائط يبعد 4 أمتار من قاعدة الحائط (أنظر الشكل في الأسفل). إذا وقف رجل عند منتصف السلم، فما هي إحداثيات نقطة وقوفه؟



تمرين 14

15) تمّ اكتشاف حاملة طائرات على شاشة الرادار عند النقطة $A(55,76)$، وتمّ اكتشاف غواصة برادار بحري عند النقطة $B(48,84)$.

إذا قيست المسافة بالميل، فكم تكون المسافة بين حاملة الطائرات ونقطة على سطح الماء على خط عمودي على الغواصة.